情報幾何学と幾何学的力学系理論の融合のためのノート*

後藤振一郎/ GOTO Shin-itiro

平成 29 年 9 月 1 日

概 要

情報幾何学の微分幾何学的側面からの解説をなるべく計算の過程を略さずに行う。また、幾何学的力学系理論、特にシンプレクティック幾何学の最低限の解説を行い、両者との関係をまとめる。なお、もし本ノートに深刻な間違い等あったら著者に是非教えて頂きたい。

1 はじめに

物理学を含む様々な数理科学が微分幾何学の言語で書き直されると、理論体系の一般化や拡張が容易になり、微分幾何学で発展した概念や信頼のおける数理的手法をそれら理論体系に持ち込むことを可能にする [4, 13]。さまざまな学問的広がりをもつ数理統計学の幾何学化の一つの実現として情報幾何学が知られている [2, 1, 3, 6]。情報幾何学の舞台となる統計多様体の上の力学を考えると [19, 5, 14, 15, 20, 11]、数理物理学やその他の数理科学にとって有益な幾何学的手法を与えることが期待できよう [10]。ここで力学の幾何学的体系は幾何学的力学系理論として従来より研究されてきたものの、情報幾何学との関係は少数の研究例を除きまだ未発展である。

本研究では情報幾何学と幾何学的力学系理論の間の関係を復習することを目的とするが、読者は微分幾何学、特にリーマン幾何学の基礎を既に習得しているものとする。

2 準備

本ノートでは、全ての幾何学的対象は滑らかであるとする。多様体 $\mathcal{M}$ の次元は有限であるとする。本研究で用いる記号を以下に列挙する。

- $X \in \Gamma T\mathcal{M}$ は**ベクトル場**、$T_\xi\mathcal{M}$ は $\xi \in \mathcal{M}$ に於ける**接空間**を表すものとする。
- g は **疑リーマン計量テンソル場**もしくは**リーマン計量テンソル場**を表す。
- アインシュタインの約束（同じ単項式内に添字が 2 度現れた時はその添字について和を取る）を用いる。添字 a が走る範囲は多様体の次元を $\dim\mathcal{M}$ とすると、$a = 1$ から $a = \dim\mathcal{M}$、 もしくは偶数次元の場合で文脈によっては $a = 1$ から $a = \dim\mathcal{M}/2$ であり、それ以外の範囲の時や、混乱の生じる可能性がある場合は明示する。
- $\Gamma T_q^{q'}\mathcal{M}$, ($q, q' \in \{0, \ldots, \}$) は**テンソル場**、$\Gamma\Lambda^q\mathcal{M}$ は q**-形式場** ($q \in \{0, \ldots, \dim\mathcal{M}\}$) を表す（ $\Gamma T_q^0\mathcal{M}$ の反対称になる要素をもつ集合が $\Gamma\Lambda^q\mathcal{M}$ ）。
- $\mathrm{d} : \Gamma\Lambda^q\mathcal{M} \to \Gamma\Lambda^{q+1}\mathcal{M}$, ($q \in \{0, \ldots, \dim\mathcal{M}\}$) は**外微分**を表す。
- $\imath_X : \Gamma\Lambda^q\mathcal{M} \to \Gamma\Lambda^{q-1}\mathcal{M}$ を $S \in \Gamma T_q^0\mathcal{M}$, ($q \in \{0, \ldots, \dim\mathcal{M}\}$) に作用する**内部積**を表す。

*バージョン 1

- Φ を与えられた多様体 2 つの多様体の間の写像とすると、Φ_* は**微分写像**（**押し出し**）、Φ^* は**引き戻し**を表す。$\alpha \in \Gamma\Lambda^q\mathcal{M}, \beta \in \Gamma\Lambda^{q'}\mathcal{M}, (\, q, q' \in \{0\ldots, \dim\mathcal{M}\}\,)$ を任意の微分形式場とすると、引き戻しと外微分は交換 $\Phi^*(\,\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\,(\Phi^*\alpha)$ し、$\Phi^*(\alpha\wedge\beta) = (\Phi^*\alpha)\wedge(\Phi^*\beta)$ が成立する。

- S をテンソル場とした時、$\mathcal{L}_X S$ はベクトル場 X に沿ったテンソル場 S に作用する**リー微分**を表す。すると、q-次微分形式場 α ($q \in \{0, \ldots, \dim\mathcal{M}\}$) に対して**カルタンの公式** $\mathcal{L}_X\alpha = (\,\mathrm{d}\imath_X + \imath_X\mathrm{d}\,)\,\alpha$ が成立する。

- X, Y を $\mathcal{M}$ 上のベクトル場とすると $[\,X, Y\,] := XY - YX$ は**リー括弧**を表す。

- $\nabla_X : \Gamma T^0_q\mathcal{M} \to \Gamma T^0_q\mathcal{M}, (\,X \in \Gamma T\mathcal{M}, q \in \{0, \ldots, \}\,),$ はベクトル場 X に沿った**共変微分**、∇ は **(アフィン) 接続**を表し、$\{X_1, \ldots, X_n\}$ をベクトル場の基底とすると、**クリストッフェル記号**と呼ばれる $n^3, (n = \dim\mathcal{M})$ 個の関数 $\{\Gamma_{ab}{}^c\}$ を指定することにより指定される。

$$\nabla_{X_a}X_b = \Gamma_{ab}{}^c X_c, \qquad a, b, c \in \{1, \ldots, n\}.$$

- ベクトル場に作用する接続は一般のテンソル場に作用する型を保存する微分演算に拡張できる $\nabla_X : \Gamma T^p_q\mathcal{M} \to \Gamma T^p_q\mathcal{M}, (\,X \in \Gamma T\mathcal{M}, q, p \in \{0, \ldots, \}\,)$。例えば $\{X_1, \ldots, X_n\}$ をベクトル場の基底とし、その双対基底を $\{e^1, \ldots, e^n\}$ とする $(n = \dim\mathcal{M})$、すなわち $e^a(X_b) = \delta^a_b$。これにより

$$\nabla_{X_a}e^b = -\Gamma_{al}{}^b e^l \qquad a, b, c \in \{1, \ldots, n\}.$$

  次のようなライプニッツ則が成立する。すなわち、$S_1, S_2 \in \Gamma T^p_q\mathcal{M}$ ($q, p \in \{0, \ldots, \}$) に対して

$$\nabla_X(S_1 \otimes S_2) = (\nabla_X S_1) \otimes S_2 + S_1 \otimes \nabla_X(S_2)\,.$$

- $S \in \Gamma T^0_q\mathcal{M}$ が与えられているとすると、$\nabla S \in \Gamma T^0_{q+1}\mathcal{M}$ は $X, X_1, \ldots, X_q \in \Gamma T\mathcal{M}$ を用いて $(\nabla S)(X, X_1, \ldots, X_q) = (\nabla_X S)(X_1, \ldots, X_q)$ で定義される。例えば、$f, \{\,Y^a\,\} \in \Gamma\Lambda^0\mathcal{M}$ に対して、$\nabla f = \mathrm{d}f$ や $(\nabla\,\mathrm{d}f)(Y, \partial/\partial x^a) = Y^b(\partial^2 f/\partial x^a\partial x^b - \Gamma_{ba}{}^c\partial f/\partial x^c)$ が成立する。ここで $Y = Y^b\partial/\partial x^b$、$\nabla_{X_a}X_b = \Gamma_{ab}{}^c X_c, (X_a = \partial/\partial x^a), (\,a, b, c \in \{1, \ldots, \dim\mathcal{M}\}\,)$ である。また、∇ の作用は任意の $S \in \Gamma T^p_q\mathcal{M}$ ($q, p \in \{0, \ldots, \}$) へ拡張できる。

- 接続 ∇ の**捻率 (トーション)** $T^\nabla : \Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma T\mathcal{M} \to \Gamma T\mathcal{M}$ とは

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \qquad \forall X, Y \in \Gamma T\mathcal{M}$$

- 接続 ∇ の**曲率** $R^\nabla : \Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma T\mathcal{M} \times \Gamma T\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ とは、すべてのベクトル場 X, Y, Z に対し、

$$R^\nabla(X, Y, Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z = [\nabla_X, \nabla_Y]\,Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

- $S \in \Gamma T^p_q\mathcal{M}$ ($q, p \in \{0, \ldots, \}$) が**平行**であるとは $\nabla S = 0$ が成立することである。

3 情報幾何学の幾何学とその周辺

情報幾何学の舞台となる多様体は様々な定義の流派があるが、以下の 2 つの接続はいずれの定義でも重要になる。

定義 3.1. *$(\mathcal{M}, g)$ を g をリーマン計量とする (疑) リーマン多様体、∇ を接続とする。もし接続 ∇^* が*

$$X(\,g(Y, Z)\,) = g(\,\nabla_X Y, Z\,) + g(\,Y, \nabla^*_X Z\,), \qquad \forall\, X, Y, Z \in T\mathcal{M} \tag{1}$$

*を満たすならば、∇^* を g に付随する***双対接続** *(dual connection) と言う [2, 1]。*

数理統計学における双対接続の意味については [1, 6] が詳しい。また、以下が成立する。

命題 3.1. *(双対接続の一意性と座標表示) :* $(\mathcal{M}, g)$ を *(疑)* リーマン多様体、∇ を接続とすると、双対接続 ∇^* は一意に決まる。

証明. 座標表示を与え、それが一意になることで証明する。$x = \{x^1, \ldots, x^n\}$ を n 次元リーマン多様体 $(\mathcal{M}, g)$ の座標とし、$\{g_{ab}\}$ が与えられており、

$$g = g_{ab}\, \mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b,$$

$\{\Gamma_{ab}{}^c\}$ が $\nabla_{\partial_a}\partial_b = \Gamma_{ab}^{\ c}\partial_c, (\partial_a := \partial/\partial x^a),$ となるように定まっているとする。$\{\Gamma^*_{ab}{}^c\}$ を $\nabla_{\partial_a}\partial_b = \Gamma^*_{ab}{}^c\partial_c, (\partial_a := \partial/\partial x^a),$ とすると (1) より

$$\frac{\partial g_{bc}}{\partial x^a} = \Gamma_{abc} + \Gamma^*_{acb},$$

この表示から $\{\Gamma^*_{ab}{}^c\}$ が一意に決まる。ここで $\{g^{ab}\}$ は $\{g_{ab}\}$ の逆行列であり、

$$\Gamma_{abc} = g_{ck}\,\Gamma_{ab}{}^k, \qquad \Gamma_{ab}^{\ c} = g^{ck}\,\Gamma_{abk},$$

等である。つまり双対接続は以下のように $\{g_{ab}\}$ と $\{\Gamma_{ab}{}^c\}$ から決まる

$$\Gamma^*_{ab}{}^c = g^{ck}\,\Gamma^*_{abk}, \qquad \Gamma^*_{abk} = \frac{\partial g_{bk}}{\partial x^a} - \Gamma_{akb} = \frac{\partial g_{bk}}{\partial x^a} - g_{bl}\,\Gamma_{ak}{}^l\,. \tag{2}$$

$\square$

双対接続に関して以下が成立する。

命題 3.2. *(双対接続の双対) :* $(\mathcal{M}, g)$ を *(疑)* リーマン多様体とする。∇^* を g に付随する双対接続とする。すると、$(\nabla^*)^* = \nabla$.

証明. 双対接続の定義 (1) により

$$X(\, g(Y, Z)\,) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z).$$

上式の ∇ として ∇^* を選ぶことにより、

$$X(\, g(Y, Z)\,) = g(\nabla^*_X Y, Z) + g(Y, (\,\nabla^*_X)^* Z),$$

これに $g(V, W) = g(W, V)$ の対称性と (1) により得られる

$$g(\nabla^*_X Y, Z) = g(Z, \nabla^*_X Y) = X(\, g(Z, Y)\,) - g(\nabla_X Z, Y),$$

を代入し、

$$\begin{aligned} X(\, g(Y, Z)\,) &= X(\, g(Z, Y)\,) - g(\nabla_X Z, Y) + g(Y, (\,\nabla^*_X)^* Z) \\ &= X(\, g(Y, Z)\,) - g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, (\,\nabla^*_X)^* Z), \end{aligned}$$

を得る。X, Y, Z は任意であるから $g(Y, \nabla_X Z) = g(Y, (\,\nabla^*_X)^* Z)$ より $(\nabla^*)^* = \nabla$。 $\square$

双対接続に似た接続として以下がある

定義 3.2. $(\,\mathcal{M}, g\,)$ を n-次元 *(疑)* リーマン多様体、∇ を接続とする。もし任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\nabla_X\,(\, g(Y, Z)\,) = g\,(\,\nabla_X Y, Z\,) + g\,(\,Y, \nabla_X Z\,), \tag{3}$$

が成り立つならば、∇ を**計量接続** *(metric connection)* と呼ぶ。

すなわち、計量接続では $\nabla g = 0$ となる接続である。双対接続と計量接続の間の関係は以下である。

$$\{\text{計量接続}\} \subseteq \{\text{双対接続}\}, \qquad (\text{等号は } \nabla = \nabla^* \text{ の時})$$

なお、この接続の成分表示は以下である。

命題 3.3. *(計量接続の成分表示) :* $(\mathcal{M}, g)$ を n-次元 *(疑)* リーマン多様体、$\{x^a\}$ を座標系、$\partial_a := \partial/\partial x^a$、$\nabla$ を計量接続でクリストッフェル記号 $\{{\Gamma_{ab}}^c\}$ を使い $\nabla_{\partial_a}\partial_b = {\Gamma_{ab}}^c\partial_c$ で指定されているとする。すると、$g = g_{ab}\,\mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b$ と書くとき、*(3)* の成分表示は

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma_{abc} + \Gamma_{acb}, \qquad \Gamma_{abc} := g_{cj}{\Gamma_{ab}}^j, \quad \Gamma_{abc} := g_{cj}{\Gamma_{ab}}^j. \tag{4}$$

証明. $X = \partial_a, Y = \partial_b, Z = \partial_c$ を (3) に代入すればよい。 □

(i) 接続、(ii)g に付随する双対接続、(iii) 計量接続に関する関係は以下である。

補題 3.1. $(\mathcal{M}, g)$ を *(疑)* リーマン多様体、∇ を接続、∇^* を g に付随する双対接続とする。すると以下が成立する。

$$\nabla = \nabla^* \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla \text{ は計量接続}$$

証明. 式 (1) で $\nabla = \nabla^*$ と置き、(3) と比較すればよい。 □

多様体上で接続 ∇ と g に付随する双対接続 ∇^* から計量接続を誘導することができる

補題 3.2. $(\mathcal{M}, g)$ を *(疑)* リーマン多様体、∇ を接続、∇^* を g に付随する双対接続とする。すると

$$\nabla^+ = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$$

は計量接続である。

証明. 双対接続の定義 (1) により任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z).$$

また、上の ∇ に ∇^* を代入し、命題3.2 により、$(\nabla^*)^* = \nabla$ なので、

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla^*_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

この 2 式の両辺を足すと

$$2X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y + \nabla^*_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z + \nabla^*_X Z).$$

上式の両辺を 2 で割ることにより、

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla^+_X Y, Z) + g(Y, \nabla^+_X Z).$$

これは ∇^+ が計量接続であることと等価である。

□

捩れなし接続は以下のように定義されていたことに注意：

定義 3.3. $\mathcal{M}$ を多様体、∇ を接続とする。もし任意のベクトル場 X, Y に対して

$$T^\nabla = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \tag{5}$$

が成り立つならば、∇ を**捩れなし接続** *(torsion-free connection)* と呼ぶ。

以下でみるように、捩れなし接続でベクトル場の基底が座標の微分のみから構成されていると (座標基底と呼ばれる [13])、クリストッフェル記号に対称性が現れる。

命題 3.4. $\mathcal{M}$ を n-次元多様体、∇ を捻じれなし接続、$x = \{x^1, \ldots, x^n\}$ を座標とする。ベクトル場の基底 $\{Z_a\}$ を $Z_a = \partial/\partial x^a$ のように選び、∇ を $\{\Gamma_{ab}{}^c\}$ を使って $\nabla_{Z_a} Z_b = \Gamma_{ab}{}^c Z_c$ と選ぶ。この時

$$\Gamma_{ab}{}^c = \Gamma_{ba}{}^c.$$

証明. $X = Z_a, Y = Z_b$ を (5) に代入すると、$[X, Y] = 0$ より

$$(\Gamma_{ab}{}^c - \Gamma_{ba}{}^c) Z_c = 0.$$

よって $\Gamma_{ab}{}^c = \Gamma_{ba}{}^c$。 □

命題 3.5. *(* 捩れなし双対接続と計量の共変微分の対称性*, [6]) :* $(\mathcal{M}, g)$ を *(*疑*)* リーマン多様体とする。任意のベクトル場 X, Y, Z に対して、

$$T^{\nabla^*}(X, Z) - T^{\nabla}(X, Z) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Z g)(Y, X).$$

証明. まず任意の接続 ∇ と g に付随する双対接続 ∇^* に対して成立する等式を以下のように導く。まず、

$$X\,(g(Y, Z)) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

に対して双対接続の定義を使うことにより

$$X\,(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

よって

$$g(Y, \nabla^*_X Z) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

この得られた式の Z と X を入れ替え、-1 を両辺に掛け、

$$-g(Y, \nabla^*_Z X) = -(\nabla_Z g)(Y, X) - g(Y, \nabla_Z X).$$

この 2 の式を加えることによって

$$g(Y, \nabla^*_X Z) - g(Y, \nabla^*_Z X) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - (\nabla_Z g)(Y, X) - g(Y, \nabla_Z X).$$

上の 2 式が加わった式の両辺に $-g(Y, [X, Z])$ を加えて

$$\begin{aligned} g(\,Y, T^{\nabla^*}(X, Z)\,) &= (\nabla_X g)(Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - (\nabla_Z g)(Y, X) - g(Y, \nabla_Z X) - g(Y, [X, Z]) \\ &= (\nabla_X g)(Y, Z) - (\nabla_Z g)(Y, X) + g(\,Y, T^{\nabla}(X, Z)\,). \end{aligned}$$

これが任意の ∇ と g に付随する双対接続 ∇^* に対して成立する等式である。従って

$$T^{\nabla^*}(X, Z) - T^{\nabla}(X, Z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\nabla_X g)(Y, Z) - (\nabla_Z g)(Y, X) = 0.$$

□

この命題に現れる $(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Z g)(Y, X)$ を書き換えるため、まず以下を導入する。

定義 3.4. $(\mathcal{M}, g)$ を *(*疑*)* リーマン多様体、∇ を接続、X, Y, Z をベクトル場とする。この時

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z),$$

を**コダッチ方程式** *(Codazzi equation)* と呼ぶ。

補題 3.3. 命題 *3.5* で現れる $(\nabla_X g)(Y,Z)=(\nabla_Z g)(Y,X)$ はコダッチ方程式の形に書き換えることが出来る

証明. まず $(\nabla_X g)(Y,Z)=(\nabla_Z g)(Y,X)$ は

$$\begin{aligned}(\nabla_X g)(Y,Z)-(\nabla_X g)(Z,Y) &= X(\,g(Y,Z)\,)-g(\nabla_X Y,Z)-g(Y,\nabla_X Z)\\ &\quad -[\,X(\,g(Z,Y)\,)-g(\nabla_X Z,Y)-g(Z,\nabla_X Y)\,]=0,\end{aligned}$$

であり、計量テンソル場の対称性

$$g(Y,Z)=g(Z,Y),\quad g(\nabla_X Y,Z)=g(Z,\nabla_X Y),\quad g(Y,\nabla_X Z)=g(\nabla_X Z,Y),$$

を代入することにより、$(\nabla_X g)(Y,Z)=(\nabla_X g)(Z,Y)$ である。 □

更に、以下も成立する。

命題 3.6. $(\mathcal{M},g)$ を *(*疑*)* リーマン多様体、∇ を接続、∇^* を g に付随す双対接続とすると、すべてのベクトル場 X,Y,Z,W に対して以下が成立する *[6]*

$$g(R^{\nabla}(X,Y,Z),W)=-\,g(Z,R^{\nabla^*}(X,Y,W)).$$

証明. 次の恒等式を考える。

$$[X,Y]\,g(Z,W)=XY\ (\,g(Z,W)\,)-YX\ (\,g(Z,W)\,).$$

左辺と右辺を (1) を使い以下のように書き換える

$$\begin{aligned}\text{左辺}:\quad & g(\nabla_{[X,Y]}Z,W)+g(Z,\nabla^*_{[X,Y]}W),\\ \text{右辺}:\quad & X\,[\,g(\nabla_Y Z,W)+g(Z,\nabla^*_Y W)\,]-Y\,[\,g(\nabla_X Z,W)+g(Z,\nabla^*_X W)\,]\\ & =[\,g(\nabla_X\nabla_Y Z,W)+g(Z,\nabla^*_X\nabla^*_Y W)\,]-[\,g(\nabla_Y\nabla_X Z,W)+g(Z,\nabla^*_Y\nabla^*_X W)\,]\\ & =g([\,\nabla_X,\nabla_Y\,]\,Z,W)+g(Z,[\nabla^*_X,\nabla^*_Y]\,W).\end{aligned}$$

ゆえに

$$g(\nabla_{[X,Y]}Z,W)+g(Z,\nabla^*_{[X,Y]}W)=g([\,\nabla_X,\nabla_Y\,]\,Z,W)+g(Z,[\nabla^*_X,\nabla^*_Y]\,W).$$

この上式を $R^{\nabla}(X,Y,Z)=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]}Z$ を使い変形すると、題意が示される。 □

以下の接続は、情報幾何学やシンプレクティック幾何学に限らず、微分幾何学全般でおそらく最も頻繁に議論される接続である。

定義 3.5. *$(\mathcal{M},g)$* を n-次元 *(*疑*)* リーマン多様体、∇ を接続とする。もし ∇ が計量接続かつ捩れなし接続*:*

$$\nabla g=0,\qquad T^{\nabla}=0,$$

であれば、∇ を**レビチビタ接続** *(Levi-Civita connection)* と呼ぶ。

レビチビタ接続は g が決まれば一意に決まる。その座標表示は以下で与えられる。

命題 3.7. *(* レビチビタ接続の座標表示 *) :* $(\mathcal{M},g)$ を n-次元 *(*疑*)* リーマン多様体、$x=\{x^1,\ldots,x^n\}$ を座標とし、$g=g_{ab}(x)=\mathrm{d}x^a\otimes\mathrm{d}x^b$ であるとする。この時レビチビタ接続のクリストッフェル記号 $\{\Gamma_{ab}{}^c\}$ は $\nabla_{\partial_a}\partial_b=\Gamma_{ab}{}^c\partial_c$, ただし $\partial_a=\partial/\partial x^a$, で定めると

$$\Gamma_{ab}{}^c=\frac{1}{2}\,g^{ck}\left(\frac{\partial g_{kb}}{\partial x^a}+\frac{\partial g_{ka}}{\partial x^b}-\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^k}\right). \tag{6}$$

証明. 標準的なリーマン幾何学を解説した文献には載っている。例えば [13]。 $\square$

双対接続、計量接続、レビチビタ接続の間の関係は以下である。

$$\{\text{レビチビタ接続}\} \subseteq \{\text{計量接続}\} \subseteq \{\text{双対接続}\},$$

本ノートでの統計多様体の定義は以下である

定義 3.6. $(\mathcal{M}, g)$ を n-次元 *(疑)* リーマン多様体、∇ を接続とする。g に付随する双対接続を ∇^* とする。もし、$T^{\nabla} = T^{\nabla^*} = 0$ であるなら $(\mathcal{M}, g, \nabla)$ を n-次元**統計多様体** *(statistical manifold)* と呼ぶ *[16, 14]*。

この定義では平坦性は特に課されていないことに注意。平坦性を課すと、双対平坦空間を定義することができる [2, 1, 3, 6]。従来の情報幾何の文献では双対平坦な多様体を考察の主な対象にしてきたが、本ノートでは双対平坦からはみ出た理論にも興味があるので、上の定義を用いる。なお、命題 3.5 を使って統計多様体を定義しても、もちろん良い [7]。双対平坦空間の場合とそれ以外の場合についての考察は付録に議論を行うので、適宜参照のこと。

統計多様体の定義から以下が成立する。

命題 3.8. *(双対接続と接続が一致する場合の統計多様体の接続) :* $(\mathcal{M}, g, \nabla)$ を統計多様体とする。この時

$$\nabla = \nabla^* \quad \Longrightarrow \quad \nabla \text{ はレビチビタ接続}$$

証明. 補題 3.1 を使い定義 3.6 により $T^{\nabla} = 0$ なので、

$$\nabla = \nabla^* \quad \Longrightarrow \quad \nabla \text{ は } \{\text{ 計量接続 }\} \text{ かつ } \{\text{ 捩れなし接続 }\}$$

計量接続かつ捩れなし接続はレビチビタ接続であったので (定義 3.5)、題意は示された。

$\square$

注意 3.1. この命題と補題 3.1 によって ∇ を接続、∇^* を g に付随する双対接続とすると以下が得られる

$$\nabla = \nabla^* \quad \overset{\text{一般に}}{\Longrightarrow} \quad \nabla \text{ は計量接続} \overset{\text{統計多様体上で}}{\Longrightarrow} \nabla \text{ はレビチビタ接続}$$

また、以下も成立する。

命題 3.9. $(\mathcal{M}, g, \nabla)$ を統計多様体とする。もし、∇ がレビチビタ接続であれば、g に付随する双対接続 ∇^* は ∇ に等しい*:* $\nabla = \nabla^*$。

$$\nabla = \nabla^* \overset{\text{統計多様体上で}}{\Longleftarrow} \nabla \text{ はレビチビタ接続}$$

証明. ∇ に対して g に付随する双対接続は以下を満たす

$$X\,(\,g(Y, Z)\,) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z).$$

一方で ∇ はレビチビタ接続であるので、$\nabla g = 0$ を満たす (定義 3.5)

$$X\,(\,g(Y, Z)\,) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

よって $\nabla^* = \nabla$. $\square$

統計多様体上で接続 ∇ と g に付随する双対接続 ∇^* からレビチビタ接続を誘導することができる

補題 3.4. $(\mathcal{M}, g, \nabla)$ を統計多様体、∇^* を g に付随する双対接続とする。すると

$$\nabla^0 = \frac{1}{2}(\,\nabla + \nabla^*\,)$$

はレビチビタ接続である。

証明. 双対接続の定義 (1) により任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$X(\,g(Y,Z)\,) = g(\,\nabla_X Y, Z\,) + g(\,Y, \nabla^*_X Z\,).$$

また、上の ∇ に ∇^* を代入し、命題3.2 により、$(\nabla^*)^* = \nabla$ なので、

$$X(\,g(Y,Z)\,) = g(\,\nabla^*_X Y, Z\,) + g(\,Y, \nabla_X Z\,).$$

この 2 つの式を足すと

$$2X(\,g(Y,Z)\,) = g(\,\nabla_X Y + \nabla^*_X Y, Z\,) + g(\,Y, \nabla_X Z + \nabla^*_X Z\,).$$

上式の両辺を 2 で割ることにより、

$$X(\,g(Y,Z)\,) = g(\,\nabla^0_X Y, Z\,) + g(\,Y, \nabla^0_X Z\,).$$

これは ∇^0 が計量接続であることの定義そのものである ((3) を見よ)。なお、統計多様体では $T^{\nabla} = T^{\nabla^*} = 0$ であるので任意のベクトル場 X, Y に対して

$$\begin{aligned} T^{\nabla^0}(X,Y) &= \nabla^0_X Y - \nabla^0_Y X - [X,Y] = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla^*_X Y) - \frac{1}{2}(\nabla_Y X + \nabla^*_Y X) - [X,Y] \\ &= \frac{1}{2} T^{\nabla}(X,Y) + \frac{1}{2} T^{\nabla^*}(X,Y) = 0. \end{aligned}$$

よって、∇^0 は捩れなし接続でもある。計量接続かつ捩れなし接続はレビチビタ接続である。 □

3.1 例

2 次元リーマン多様体での例を挙げる。
$(\mathcal{M}, g)$ を 2-次元リーマン多様体、$x = \{x^1, x^2\}$ とする。ただし、

$$g = g_0(x)\left(\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2 \otimes \mathrm{d}x^2\right),$$

とする。ただし、g_0 は適当な正値をとる関数であるとする。直ちに $g_{ab} = g_0 \delta_{ab}, g^{ab} = (1/g_0)\,\delta^{ab}$。

3.1.1 レビチビタ接続

レビチビタ接続 ∇ の接続係数 $\{\Gamma_{ab}{}^c\}$ はベクトル場の基底を $\partial_a = \partial/\partial x^a, a = \{1,2\}$ と選び、$\nabla_{\partial_a}\partial_b = \Gamma_{ab}{}^c \partial_c$ となるものとして決める。接続係数は (6) より以下のように計算される

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}{}^1 &= \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1}, \qquad \Gamma_{12}{}^1 = \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2} = \Gamma_{21}{}^1, \qquad \Gamma_{22}{}^1 = \frac{-1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{11}{}^2 &= \frac{-1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2}, \qquad \Gamma_{12}{}^2 = \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1} = \Gamma_{21}{}^2, \qquad \Gamma_{22}{}^2 = \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

接続係数の間の関係を見やすくするために

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1}, \qquad 及び \qquad \Gamma_2 = \frac{-1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2} \tag{7}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{\;1} &= \Gamma_1, \qquad \Gamma_{12}^{\;1} = -\Gamma_2 = \Gamma_{21}^{\;1}, \qquad \Gamma_{22}^{\;1} = -\Gamma_1, \\ \Gamma_{11}^{\;2} &= \Gamma_2, \qquad \Gamma_{12}^{\;2} = \Gamma_1 = \Gamma_{21}^{\;2}, \qquad \Gamma_{22}^{\;2} = -\Gamma_2. \end{aligned}$$

3.1.2 双対接続

接続 ∇ が $\{\Gamma_{ab}{}^{c}\}$ を用いて $\nabla_{\partial_a}\partial_b = \Gamma_{ab}{}^{c}\partial_c$ により定まっているとする。ただし $\partial_a = \partial/\partial x^a, a = \{1,2\}$。この時の双対接続を (2) を使って計算する。まず

$$\begin{aligned}
&\Gamma^*_{111} = \partial_1 g_0 - g_0\Gamma_{11}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{112} = -g_0\Gamma_{12}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{121} = -g_0\Gamma_{11}{}^{2}, \quad \Gamma^*_{122} = \partial_1 g_0 - g_0\Gamma_{12}{}^{2},\\
&\Gamma^*_{211} = \partial_2 g_0 - g_0\Gamma_{21}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{212} = -g_0\Gamma_{22}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{221} = -g_0\Gamma_{21}{}^{2}, \quad \Gamma^*_{222} = \partial_2 g_0 - g_0\Gamma_{22}{}^{2}.
\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}
&\Gamma^*_{11}{}^{1} = \frac{1}{g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1} - \Gamma_{11}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{12}{}^{1} = -\Gamma_{11}{}^{2}, \quad \Gamma^*_{21}{}^{1} = \frac{1}{g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2} - \Gamma_{21}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{22}{}^{1} = -\Gamma_{21}{}^{2},\\
&\Gamma^*_{11}{}^{2} = -\Gamma_{12}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{12}{}^{2} = \frac{1}{g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1} - \Gamma_{12}{}^{2}, \quad \Gamma^*_{21}{}^{2} = -\Gamma_{22}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{22}{}^{2} = \frac{1}{g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2} - \Gamma_{22}{}^{2}.
\end{aligned}$$

- 双対接続の接続係数に $T^{\nabla^*} = 0$ を課すと

$$\begin{aligned}
\Gamma^*_{12}{}^{1} = \Gamma^*_{21}{}^{1} \quad &: \quad \Gamma_{21}{}^{1} - \Gamma_{11}{}^{2} = \frac{1}{g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2} = -2\Gamma_2,\\
\Gamma^*_{12}{}^{2} = \Gamma^*_{21}{}^{2} \quad &: \quad \Gamma_{12}{}^{2} - \Gamma_{22}{}^{1} = \frac{1}{g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1} = 2\Gamma_1.
\end{aligned}$$

- 双対接続の接続係数に $\nabla^* = \nabla$ を課すと

$$\begin{aligned}
\Gamma^*_{11}{}^{1} = \Gamma_{11}{}^{1} = \Gamma^*_{12}{}^{2} = \Gamma_{12}{}^{2} = \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1} = \Gamma_1,\\
\Gamma^*_{22}{}^{2} = \Gamma_{22}{}^{2} = \Gamma^*_{21}{}^{1} = \Gamma_{21}{}^{1} = \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2} = -\Gamma_2.
\end{aligned}$$

  故に以下の接続係数は任意であることが分かる。

$$\Gamma^*_{12}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{22}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{11}{}^{2}, \quad \Gamma^*_{21}{}^{2}.$$

- 双対接続の接続係数に $T^{\nabla^*} = 0$ 及び $\nabla^* = \nabla$ を課すと命題3.8 によりレビチビタ接続になるはずである。実際にこれを確認してみる。

$$\begin{aligned}
\Gamma^*_{11}{}^{1} = \Gamma^*_{12}{}^{2} = \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^1} = \frac{1}{2}(\Gamma^*_{12}{}^{2} - \Gamma^*_{22}{}^{1}),\\
\Gamma^*_{22}{}^{2} = \Gamma^*_{21}{}^{1} = \frac{1}{2g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(\Gamma^*_{21}{}^{1} - \Gamma^*_{11}{}^{2}),
\end{aligned}$$

  であり、上の第一式から $\Gamma^*_{22}{}^{1} = -\Gamma^*_{12}{}^{2}$、第二式から $\Gamma^*_{11}{}^{2} = -\Gamma^*_{21}{}^{1}$ と決まるので、

$$\begin{aligned}
&\Gamma^*_{11}{}^{1} = \Gamma_1, \quad \Gamma^*_{12}{}^{1} = -\Gamma_2 = \Gamma^*_{21}{}^{1}, \quad \Gamma^*_{22}{}^{1} = -\Gamma_1,\\
&\Gamma^*_{11}{}^{2} = \Gamma_2, \quad \Gamma^*_{12}{}^{2} = \Gamma_1 = \Gamma^*_{21}{}^{2}, \quad \Gamma^*_{22}{}^{2} = -\Gamma_2,
\end{aligned}$$

  となり、レビチビタ接続と一致する。

4 概複素多様体、概エルミート多様体、シンプレクティック多様体

この章では情報幾何学から離れ、比較的よく知られている複素多様体周辺の知識とシンプレクティック多様体の基礎をおさらいする。次章以降で本章でのまとめを使って前章で議論した統計多様体の幾何学との関係を述べる。

4.1 概複素構造周辺の幾何学

偶数次元多様体では (概) 複素多様体がしばしば議論される。本ノートではこれらの多様体の間の関係を調べる。そのためにまず、概複素構造を定義する。

定義 4.1. $\mathcal{M}$ を多様体、$J_\xi : T_\xi\mathcal{M} \times T_\xi\mathcal{M} \to T_\xi\mathcal{M}, (\xi \in \mathcal{M})$ が線形で $J_\xi J_\xi = -\mathrm{Id}$ を満たすものを**概複素構造** *(almost complex structure)* と呼ぶ。

$J_\xi J_\xi$ は J_ξ^2 とも書かれ、J は $(1,1)$ テンソル場である。任意の多様体に概複素構造が導入できるわけではなく、少なくとも偶数次元多様体でなければいけない。

例 4.1. $\mathcal{M}$ を $2n$-次元多様体、(x,y) をその座標で $x = \{x^1, \dots, x^n\}$, $y = \{y^1, \dots, y^n\}$ とする。この時

$$J = \sum_{a=1}^{n} \left(\mathrm{d}y^a \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} - \mathrm{d}x^a \otimes \frac{\partial}{\partial y^a} \right), \tag{8}$$

は概複素構造である。実際

$$J\frac{\partial}{\partial x^a} = J\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, -\right) = -\frac{\partial}{\partial y^a}, \qquad J\frac{\partial}{\partial y} = J\left(\frac{\partial}{\partial y^a}, -\right) = \frac{\partial}{\partial x^a},$$

より、

$$J\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, -\right), -\right) = J\left(-\frac{\partial}{\partial y^a}, -\right) = -\frac{\partial}{\partial x^a}, \quad J\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y^a}, -\right), -\right) = J\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, -\right) = -\frac{\partial}{\partial y^a}.$$

従って $J^2 = -\mathrm{Id}$.

注意 4.1. 式 (8) ではなく

$$J' = \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \mathrm{d}y^a - \frac{\partial}{\partial y^a} \otimes \mathrm{d}x^a \right)$$

が世間では広く使われるようである。この場合 $\nabla J'$ はベクトル場 X, Y と一形式場 α を使って

$$\nabla J'(X, \alpha, Y) = (\nabla_X J')(\alpha, Y)$$

で定義され、左辺のベクトル場の入るスロット 2 つが一形式場の入るスロットによって分断されている。

固定された概複素構造が導入された多様体には名前がついている。

定義 4.2. $\mathcal{M}$ を多様体、J を概複素構造とする。この時、$(\mathcal{M}, J)$ を**概複素多様体** *(almost complex manifold)* と呼ぶ *[18]*。

概複素多様体には計量が入っていなくてもよく、また概複素多様体は一般には複素多様体ではないことに注意。

定義 4.3. 概複素多様体 $(\mathcal{M}, J)$ において、$\mathcal{M}$ が複素多様体になる時、J を**積分可能**と呼ぶ *[18]*。

Nijenhuis テンソル場と呼ばれるテンソル場が消える時に複素多様体になる:

定理 4.1. *(Newlander-Nirenberg, [18]):* $(\mathcal{M}, J)$ を概複素多様体とする。すると以下が成り立つ

$$\text{Nijenhuis テンソル場 } N_J \text{ がゼロになる} \qquad \Longleftrightarrow \qquad J \text{ が積分可能}$$

ここで

$$N_J(X, Y) := J[X, Y] - J[JX, JY] - [JX, Y] - [X, JY].$$

複素多様体については例えば [13] を参考のこと。
また以下の多様体も使われる。

定義 4.4. $(\mathcal{M}, g)$ を *(疑)* リーマン多様体、J を概複素構造とする。もし

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

が全ての $X, Y \in T\mathcal{M}$ に対して成立する時、$(\mathcal{M}, g, J)$ を**概エルミート多様体** *(almost Hermite manifold)* と呼ぶ *[18, 16, 17]*。

例 4.2. $(\mathcal{M}, g)$ を 2 次元 (疑) リーマン多様体、(x, y) を座標系、J を (8) で与えられる概複素構造とする。ここで g は以下で与えられる

$$g = g_{xx}\, \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + g_{yy}\, \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y,$$

この時、$g_{xx} = g_{yy}$ であれば $(\mathcal{M}, g, J)$ は概エルミート多様体である。
この主張を示すために、まずベクトル場の基底を $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y\}$ と指定する。次に

$$J\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}, \qquad J\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x},$$

に注意して以下のように表を作る。

X	Y	$g(JX, JY)$	$g(X, Y)$
$\partial/\partial x$	$\partial/\partial x$	g_{yy}	g_{xx}
$\partial/\partial x$	$\partial/\partial y$	0	0
$\partial/\partial y$	∂/∂	0	0
$\partial/\partial y$	$\partial/\partial y$	g_{xx}	g_{yy}

この表から、$g_{xx} = g_{yy}$ である時、$g(JX, JY) = g(X, Y)$ である。

リーマン多様体の上での概複素構造に対して、ある意味で双対な $(1, 1)$ テンソル場を以下のように導入する。

定義 4.5. $(\mathcal{M}, g)$ を $2n$-次元リーマン多様体、J を概複素構造とする。$(1, 1)$ 型テンソル場 J^* を任意の $X, Y \in T\mathcal{M}$ に対して

$$g(JX, Y) = -g(X, J^*Y), \tag{9}$$

となるように定義する。この J^* を g に付随する**双対概複素構造** *(dual almost complex strucuture)* と呼ぶ。

ただし、この双対概複素構造という名前は普及している訳ではなく、ノートの著者が便宜的に名付けたものである。
以下のような性質がある。

補題 4.1. $(\mathcal{M}, g)$ を *(疑)* リーマン多様体、J を概複素構造、J^* を g に付随する双対概複素構造とする。すると以下が成り立つ *[14]*

1. $(J^*)^* = J$.
2. $g(JX, J^*Y) = g(X, Y)$.
3. ${J^*}^2 = -\mathrm{Id}$.
4. 以下は同値

- $J = J^*$
- $g(JX, JY) = g(X, Y)$
- $g(JX, Y) = g(X, -JY)$

証明. 1. 式 (9) の J に J^* を代入して

$$g(J^*X, Y) = -\,g(X, (J^*)^*Y),$$

上の左辺を変形していく。左辺は

$$g(J^*X, Y) = g(Y, J^*X) \overset{(9)}{=} -\,g(JY, X) = -\,g(X, JY),$$

これはこの証明初めの式の右辺に等しい。したがって $(J^*)^* = J$。
2. $X = J^*X'$ を (9) に代入して $J^2 = -\mathrm{Id}$ を用いることにより

$$-\,g(X', Y) = -\,g(JX', J^*Y).$$

よって X' を X と書き直し、$g(X, Y) = g(JX, J^*Y)$.
3. $Y = J^*Y'$ を (9) に代入して

$$g(JX, J^*Y') = -\,g(X, {J^*}^2 Y').$$

上の左辺に 2. で得られた等式 $g(JX, J^*Y') = g(X, Y')$ を代入して

$$g(X, Y') = -\,g(X, {J^*}^2 Y').$$

よって ${J^*}^2 = -\mathrm{Id}$.
4. ($J = J^* \Rightarrow g(JX, JY) = g(X, Y)$ の証明) : 定義と仮定により

$$g(JX, Y) \overset{(9)}{=} -g(X, J^*Y), \qquad g(JX, Y) \overset{2.}{=} g(J^2X, JY) = -\,g(X, JY),$$

の 2 式を得る。これらは等しいので、$g(X, (J - J^*)Y) = 0$ を得る。X, Y は任意なので、$J = J^*$。
($J = J^* \Leftarrow g(JX, JY) = g(X, Y)$ の証明) : 定義と仮定により

$$g(JX, JY) \overset{(9)}{=} -g(X, J^*JY), \qquad g(JX, JY) = g(X, Y) = -g(X, JJY),$$

の 2 式を得る。これらは等しいので、$g(X, (J^* - J)JY) = 0$ を得る。X, Y は任意なので、$J = J^*$。
($g(JX, JY) = g(X, Y) \Rightarrow g(JX, Y) = g(X, -JY)$ の証明) : 仮定の部分の Y に $Y = JY'$ を代入することにより

$$g(JX, JJY') = g(X, JY').$$

よって Y' を Y と書き直して $J^2 = -\mathrm{Id}$ を用いて $g(JX, Y) = g(X, -JY)$。
($g(JX, JY) = g(X, Y) \Leftarrow g(JX, Y) = g(X, -JY)$ の証明) : 仮定の部分の Y に $Y = JY'$ を代入し、$JJ = -\mathrm{Id}$ を用いることにより

$$g(JX, JY') = g(X, Y').$$

よって Y' を Y と書き直して $g(JX, JY) = g(X, Y)$。

□

また、以下も成り立つ

補題 4.2. $(\mathcal{M}, g, \nabla)$ を統計多様体、J を概複素構造、J^* を双対概複素構造とする。すると任意のベクトル場 X, Y, Z に対して以下が成立する *[17, 14]*

$$g(\,(\nabla_Z J)X, Y\,) = -\,g(\,X, (\nabla^*_Z J^*)Y\,).$$

証明. 以下のような直接的な計算で証明できる。まず、

$$(\nabla_Z J)X = \nabla_Z(JX) - J\nabla_Z X, \qquad \text{及び} \qquad g(J\nabla_Z X, Y) \overset{(9)}{=} -g(\nabla_Z X, J^*Y)$$

により

$$g(\,(\nabla_Z J)X, Y\,) = g(\,\nabla_Z(JX), Y\,) - g(\,J\nabla_Z X, Y\,) = g(\,\nabla_Z(JX), Y\,) + g(\,\nabla_Z X, J^*Y\,).$$

上式の最右辺の第一項と第二項を双対接続の定義 (1) により得られる

$$\begin{aligned} g(\,\nabla_Z(JX), Y\,) &\overset{(1)}{=} Z\,(\,g(\,JX, Y\,)\,) - g(JX, \nabla^*_Z Y), \\ g(\,\nabla_Z X, J^*Y\,) &\overset{(1)}{=} Z\,(\,g(\,X, J^*Y\,)\,) - g(X, \nabla^*_Z(J^*Y)), \end{aligned}$$

で書きなおすことにより、

$$g(\,(\nabla_Z J)X, Y\,) = Z\,(\,g(\,JX, Y\,)\,) - g(JX, \nabla^*_Z Y) + Z\,(\,g(\,X, J^*Y\,)\,) - g(X, \nabla^*_Z(J^*Y)).$$

また、$g(JX, \nabla^*_Z Y) \overset{(9)}{=} -g(X, J^*\nabla^*_Z Y)$ により、上式右辺の第二項を書き換えて、

$$\begin{aligned} g(\,(\nabla_Z J)X, Y\,) &= Z\,(\,g(\,JX, Y\,)\,) + g(X, J^*\nabla^*_Z Y) + Z\,(\,g(\,X, J^*Y\,)\,) - g(X, \nabla^*_Z(J^*Y)) \\ &= Z\,(\,g(\,JX, Y\,) + g(\,X, J^*Y\,)\,) + g(\,X, J^*\nabla^*_Z Y - \nabla^*_Z(J^*Y)\,) \\ &\overset{(9)}{=} g(\,X, J^*\nabla^*_Z Y - \nabla^*_Z(J^*Y)\,) = -\,g(\,X, (\nabla^*_Z J^*)Y\,). \end{aligned}$$

□

例 4.3. $(\mathcal{M}, g)$ を 2 次元 (疑) リーマン多様体、J を概複素構造、(x, y) を座標系とする。特に g と J が

$$g_{(x,y)} = g_{xx}(x,y)\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + g_{yy}(x,y)\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y, \qquad J = \mathrm{d}y \otimes \frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{d}x \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

で与えられているものとする。この時 J^* は以下のように求まる。まずベクトル場の基底を $\{\,\partial/\partial x, \partial/\partial y\,\}$ と選ぶ。これらを (9) に代入して以下を得る。

X	Y	$g(JX, Y)$	$-\,g(X, J^*Y)$
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	0	$-\,g_{xx}\,\mathrm{d}x\left(J^*\frac{\partial}{\partial x}\right)$
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$-\,g_{yy}$	$-g_{xx}\,\mathrm{d}x\left(J^*\frac{\partial}{\partial y}\right)$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	g_{xx}	$-g_{yy}\,\mathrm{d}y\left(J^*\frac{\partial}{\partial x}\right)$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	0	$-g_{yy}\,\mathrm{d}y\left(J^*\frac{\partial}{\partial y}\right)$

この表から

$$J^* = \frac{g_{yy}}{g_{xx}}\,\mathrm{d}y \otimes \frac{\partial}{\partial x} - \frac{g_{xx}}{g_{yy}}\,\mathrm{d}x \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

と決まる。$J^{*2} = -\mathrm{Id}$ は以下のように確かめられる。まず、

$$J^*\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{g_{xx}}{g_{yy}}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad J^*\frac{\partial}{\partial y} = \frac{g_{yy}}{g_{xx}}\frac{\partial}{\partial x},$$

より、

$$J^{*2}\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{g_{xx}}{g_{yy}}J^*\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}, \qquad J^{*2}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{g_{yy}}{g_{xx}}J^*\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}.$$

すると、$g_{xx} = g_{yy}$ の時 $J^* = J$ となることが分かる。

また以下の多様体が定義されている。

定義 4.6. $(\mathcal{M}, g)$ を *(疑)* リーマン多様体とする。J を概複素構造とする。J^* を g に付随する双対疑複素構造を導入する。この時 $(\mathcal{M}, g, J)$ を**概エルミート的多様体** *(almost Hermite-like manifold)* と呼ぶ *[16, 17]*。

4.2 シンプレクティック構造と概複素構造周辺の幾何学

偶数次元の多様体で概複素構造と伴に頻繁に議論されるのが、シンプレクティック構造である。それは以下のように定義される。

定義 4.7. $\mathcal{M}$ を多様体、ω を 2-形式場とする。この時

- $\mathrm{d}\omega = 0$。
- すべてのベクトル場 X に対しても $\omega(X, -)$ が X と同型, *(*非退化条件と呼ばれる*)*。

であるなら ω を**シンプレクティック 2-形式 (場)** もしくは**シンプレクティック構造** *(symplectic structure)* と呼ぶ。また $(\mathcal{M}, \omega)$ を**シンプレクティック多様体** *(symplectic manifold)* と呼ぶ。

シンプレクティック多様体の上には良い座標がとれることが知られている。

定義 4.8. $(\mathcal{M}, \omega)$ を $2n$ 次元多様体、(q, p) を座標系 *(*ただし $q = \{q^1, \ldots, q^n\}$、$p = \{p_1, \ldots, p_n\}$*)* とする。もし

$$\omega = \sum_{a=1}^{n} \mathrm{d}p_a \wedge \mathrm{d}p^a,$$

と書くことができるなら、(q, p) を**正準座標系** *(canonical coordinate)* とよぶ。

正準座標の存在はダルブーの定理として知られている [4]。
シンプレクティック多様体の間の以下のような写像がよく用いられる。

定義 4.9. $(\mathcal{M}_1, \omega_1)$ と $(\mathcal{M}_2, \omega_2)$ をシンプレクティック多様体、$\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ を写像とする。もし、$\varphi^* \omega_2 = \omega_1$ であれば、φ はシンプレクティックであるという。もし、$\dim \mathcal{M}_1 = \dim \mathcal{M}_2$ であり、φ が微分同相であるなら、φ を**シンプレクティック微分同相** *(symplectic diffeomorphism)* という *[12]*。

単一のシンプレクティック多様体を考える時、以下がよく議論される。

定義 4.10. $(\mathcal{M}, \omega)$ をシンプレクティック多様体とする。もし、ベクトル場 X が

$$\mathcal{L}_X \omega = 0,$$

を満たすならば、X を**シンプレクティックベクトル場**と呼ぶ。

ハミルトンベクトル場は以下のように定義される。

定義 4.11. $(\mathcal{M}, \omega)$ をシンプレクティック多様体、h を $\mathcal{M}$ の上の関数とする。もしベクトル場 X_h が

$$\imath_{X_h} \omega = -\mathrm{d}h, \tag{10}$$

を満たすなら、X_h を h をハミルトニアンとする**ハミルトンベクトル場** *(Hamiltonian vector field)* と呼ぶ *[12]*。

注意 4.2. 以下に注意

- 式 (10) の右辺のマイナス記号が無い定義を採用している文献も多数ある
- カルタン公式を使うと、h をハミルトニアンとするハミルトンベクトル場 X_h はシンプレクティックベクトル場になることが分かる：

$$\mathcal{L}_{X_h} \omega = (\mathrm{d}\imath_{X_h} + \imath_{X_h} \mathrm{d}) \omega = \mathrm{d}\imath_{X_h} \omega = -\mathrm{d}\mathrm{d}h = 0.$$

物理的には、ハミルトンベクトル場の流れは無限小正準変換を与える、と言えよう。

シンプレクティック多様体の上に接続を考えることができる。次の接続はシンプレクティック構造と相性がよいとされているようである [15]。

定義 4.12. $(\mathcal{M},\omega)$ をシンプレクティック多様体、∇ を接続とする。もし次の *2* つの条件を満たす時、

- $\nabla\omega = 0,$
- $T^{\nabla} = 0,$

この接続 ∇ を**シンプレクティック接続** *(symplectic connection)* と呼ぶ。

多様体上のシンプレクティック構造と概複素構造の相性は以下のように述べられる。

定義 4.13. $(\mathcal{M},\omega)$ をシンプレクティック多様体, J を概複素構造とする。もし

- 任意のベクトル場 X, Y に対し、$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$.
- ベクトル場がゼロでは無い *(*$X \neq 0$*)* ならば、$\omega(JX, X) > 0,$

が満たされるのであれば、J と ω は**両立する**という *[15]*。

5　統計多様体とシンプレクティック構造

偶数次元の多様体では概複素多様体の他に、シンプレクティック多様体が興味の対象となることが多い。したがって、統計多様体の上にシンプレクティック構造を許容するかについて議論された [14]。ここでは、その復習をしつつ、その具体的な例を挙げる。また、これらの復習に関連した事実も述べる。

統計多様体の上にシンプレクティック構造を許容するための条件が論文 [14] の補題にある。ここにそれを再掲する。

補題 5.1. *(野田, Lemma 4.2 of [14]) :* $(\mathcal{M}, g, \nabla)$ を統計多様体、J を X, Y を任意のベクトル場とした時 $g(JX, JY) = g(X, Y)$ を満たす概複素構造とする。

1. $\nabla^*_X Y = \nabla_X Y - J(\nabla_X J)Y,$
2. $(\nabla_X J)Y = (\nabla_Y J)X,$

の 2 つの条件が成立するとき、

$$\omega(X, Y) := g(JX, Y), \tag{11}$$

で定める 2-形式場 ω について

- ω はシンプレクティック 2 形式場である *(* $\mathrm{d}\,\omega = 0,$ ω は非退化 *)*。
- ∇ はシンプレクティック接続 *(* $\nabla\omega = 0$ と $T^{\nabla} = 0$ を満たす *)*

証明. 文献 [14] に詳しい証明があるので、それを参照のこと。 □

注意 5.1. 以下に注意。

- J の性質により $(\mathcal{M}, g, J)$ は概エルミート多様体となる。
- $(\mathcal{M}, g, \nabla)$ は統計多様体で、命題 3.1 により ∇^* は一意に決まる。したがって、1. の条件を確かめることとは、まず右辺を計算し、それがその一意に決まる双対接続と一致するか確かめることである。

- $\nabla J = 0$ を満たす接続 ∇ であれば条件 2. を満たし、1. の条件は $\nabla = \nabla^*$ になる。したがって、$\nabla J = 0$ の接続であるならば、∇^* を ∇ と g により決め、$\nabla = \nabla^*$ が成立すれば、命題3.8 によって ∇ はレビチビタ接続。また、ω はシンプレクティック 2 形式場かつ $\nabla\omega = 0$。

- ∇ をレビチビタ接続に選ぶと命題3.9 により、$\nabla = \nabla^*$。もし、レビチビタ接続 ∇ が $\nabla J = 0$ であるなら、ω はシンプレクティック 2 形式場かつ $\nabla\omega = 0$。

- シンプレクティック多様体に統計構造を許容するための条件も論文 [14, 15] に議論されている。

このシンプレクティック 2 形式場が 2 形式場の持つ反対称性を持つことは以下のように分かる

$$\omega(Y,X) \overset{(11)}{=} g(JY,X) = g(X,JY) = g(JX,JJY) = -\,g(X,JY) \overset{(11)}{=} -\,\omega(X,Y).$$

リーマン幾何学で次のベクトル場は対称性を表す

定義 5.1. $(\mathcal{M},g)$ をリーマン多様体とする。もしベクトル場 K が $\mathcal{L}_K g = 0$ を満たすならば、K を**キリングベクトル場** *(Killing vector field)* と呼ぶ *[13]*。

キリングベクトル場とシンプレクティックベクトル場の間の関係は以下となる。

命題 5.1. *(キリングベクトル場とシンプレクティックベクトル場) :* $(\mathcal{M},g,\nabla)$ を統計多様体、J を $g(JX,JY) = g(X,Y)$ を満たす概複素構造とし、ω が *(11)* により定義され、シンプレクティック 2-形式場になっているとする。また、K をキリングベクトル場とする *(*$\mathcal{L}_K g = 0$*)*。この時、K がシンプレクティックベクトル場になるための条件は $\mathcal{L}_K J = 0$ *:*

$$K \text{ がキリングベクトル場かつ } \mathcal{L}_K J = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad K \text{ がシンプレクティックベクトル場}$$

証明. 式 (11) に $\mathcal{L}_K$ を両辺に作用させると、その左辺と右辺はそれぞれ以下となる

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_K\,(\,\omega(X,Y)\,) &= (\,\mathcal{L}_K\omega\,)\,(X,Y) + \omega(\mathcal{L}_K X, Y\,) + \omega(\mathcal{L}_K X, Y\,),\\
\mathcal{L}_K\,(\,g(JX,Y)\,) &= (\,\mathcal{L}_K g\,)\,(JX,Y) + g(\mathcal{L}_K(\,JX), Y) + g(JX, \mathcal{L}_K Y\,).
\end{aligned}$$

上式の両辺の差を取り、$\mathcal{L}_K J = 0$ の条件から得られる $\mathcal{L}_K(JX) = (\mathcal{L}_K J)X + J(\mathcal{L}_K X) = J(\mathcal{L}_K X)$ を代入すると

$$0 = (\,\mathcal{L}_K\omega\,)\,(X,Y) - (\,\mathcal{L}_K g\,)\,(JX,Y) + \omega(\mathcal{L}_K X, Y\,) + \omega(\mathcal{L}_K X, Y\,) - g(J\mathcal{L}_K X, Y) - g(JX, \mathcal{L}_K Y\,).$$

上の式に (11) から得られる $\omega(\mathcal{L}_K X, Y) = g(J\mathcal{L}_K X, Y)$ 及び $\omega(X, \mathcal{L}_K Y) = g(JX, \mathcal{L}_K Y)$ を代入すると

$$0 = (\,\mathcal{L}_K\omega\,)\,(X,Y) - (\,\mathcal{L}_K g\,)\,(JX,Y).$$

よって、$\mathcal{L}_K J = 0$ かつ $\mathcal{L}_K g = 0$ であるなら $\mathcal{L}_K\omega = 0$. □

例 5.1. $(\mathcal{M},g)$ を 2 次元リーマン多様体、J を概複素構造、(x,y) をその座標、

$$g = g_{xx}(x,y)\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + g_{yy}(x,y)\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y, \qquad J = \mathrm{d}y \otimes \frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{d}x \otimes \frac{\partial}{\partial y},$$

とする。ベクトル場の基底を $\{\partial_x, \partial_y\}$ ただし $(\partial_x = \partial/\partial x,\ \partial_y = \partial/\partial y)$ とする。この時以下を示す。

1. 概エルミート多様体でなければ ω が (11) によってうまく定義できないこと

2. $g_{xx} = g_{yy} =: g_0$ の場合の正準座標

3. キリングベクトル場 K を $K = K^x\partial_x + K^y\partial_y$ とおいた時に関数 K^x と K^y が満たす微分方程式

4. $\mathcal{L}_Z J = 0$ を満たすベクトル場 Z を $Z = Z^x\partial_x + Z^y\partial_y$ とおいた時に関数 Z^x と Z^y が満たす微分方程式

5. キリングベクトル場はシンプレクティックベクトル場にもなっている

1. 以下の表をつくる。

X	Y	$\omega(X,Y) = g(JX,Y)$
∂_x	∂_x	0
∂_x	∂_y	$-g_{yy}$
∂_y	∂_x	g_{xx}
∂_y	∂_y	0

したがって $g_x \neq g_{yy}$ の場合、ω は $\omega(Y,X) = -\omega(X,Y)$ とならない：

$$\omega(\partial_x, \partial_y) + \omega(\partial_y, \partial_x) = -\,g_{yy} +\, g_{xx} \neq 0.$$

2. 計量テンソル場 g が g_0 をある関数として $g = g_0(x,y)(\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y)$ であるなら、

$$\omega = -\,g_0 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}G_0 \wedge \mathrm{d}x,$$

ここで G_0 は $\partial G_0/\partial y = g_0$ を満たす (x,y) の関数。したがって、正準座標は (x, G_0) である。
3. $\mathcal{L}_K g$ を以下のように計算する

$$\mathcal{L}_K g = (Kg_0)\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + g_0\,[\,\mathrm{d}(Kx) \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}(Kx) + \mathrm{d}(Ky) \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}(Ky)\,]\,.$$

上式に $Kx = K^x, Ky = K^y$ を代入すると

$$\mathcal{L}_K g = (Kg_0)\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + g_0\,[\,\mathrm{d}K^x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}K^x + \mathrm{d}K^y \otimes \mathrm{d}y + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}K^y\,]\,.$$

これから以下の表をつくる。

X	Y	$(\mathcal{L}_K g)(X,Y)$
∂_x	∂_x	$K^x(\partial g_0/\partial x) + K^y(\partial g_0/\partial y) + 2g_0(\partial K^x/\partial x)$
∂_x	∂_y	$g_0\,(\partial K^x/\partial y) + g_0\,(\partial K^y/\partial x)$
∂_y	∂_x	$g_0\,(\partial K^x/\partial y) + g_0\,(\partial K^y/\partial x)$
∂_y	∂_y	$K^x(\partial g_0/\partial x) + K^y(\partial g_0/\partial y) + 2g_0(\partial K^y/\partial y)$

これから $\mathcal{L}_K g = 0$ となる K^x, K^y は $g_0 \neq 0$ の時以下の微分方程式を満たす。

$$K^x\frac{\partial g_0}{\partial x} + K^y\frac{\partial g_0}{\partial y} + 2g_0\frac{\partial K^x}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial K^x}{\partial y} + \frac{\partial K^y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial K^x}{\partial x} - \frac{\partial K^y}{\partial y} = 0.$$

4. $\mathcal{L}_K Z$ を以下のように計算する。

$$\mathcal{L}_K Z = \mathrm{d}(Zy) \otimes \partial_x + \mathrm{d}y \otimes [\,\mathcal{L}_Z \partial_x\,] - \mathrm{d}(Zx) \otimes \partial_y - \mathrm{d}x \otimes [\,\mathcal{L}_Z \partial_y\,]\,.$$

上の式に $Zx = Z^x, Zy = Z^y$, 及び

$$\mathcal{L}_Z \partial_x = [Z, \partial_x] = -\frac{\partial Z^x}{\partial x}\partial_x - \frac{\partial Z^y}{\partial x}\partial_y, \qquad \mathcal{L}_Z \partial_y = [Z, \partial_y] = -\frac{\partial Z^x}{\partial y}\partial_x - \frac{\partial Z^y}{\partial y}\partial_y,$$

を代入して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Z J \;\; &= \;\; \left(\frac{\partial Z^y}{\partial x} + \frac{\partial Z^x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \otimes \partial_x + \left(-\frac{\partial Z^x}{\partial x} + \frac{\partial Z^y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \otimes \partial_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial Z^y}{\partial y} - \frac{\partial Z^x}{\partial x}\right)\mathrm{d}y \otimes \partial_x + \left(-\frac{\partial Z^y}{\partial x} - \frac{\partial Z^x}{\partial y}\right)\mathrm{d}y \otimes \partial_y,\end{aligned}$$

を得る。$\mathcal{L}_Z J=0$ が満たされるためには

$$\frac{\partial Z^y}{\partial x}+\frac{\partial Z^x}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial Z^x}{\partial x}-\frac{\partial Z^y}{\partial y}=0.$$

5. 上に示した 3. と 4. により、この J を伴う統計多様体のキリングベクトル場 K は $\mathcal{L}_K J=0$ も満たし、命題5.1 により、$\mathcal{L}_K\omega=0$ である。

更に以下のような多様体が定義されている

定義 5.2. $(\mathcal{M},g,J)$ を概エルミート多様体、任意のベクトル場 X,Y に対し、ω_{II} を以下で定義される 2 形式場

$$\omega_{\mathrm{II}}(X,Y)=g(X,JY), \tag{12}$$

とする。もし、$\mathrm{d}\omega_{\mathrm{II}}=0$ であるならば、$(\mathcal{M},g,J)$ を**概ケーラー多様体** *(almost Kähler manifold)* と呼ぶ *[18]*。

定義 5.3. $(\mathcal{M},g,J)$ を概ケーラー多様体とする。もし、J が積分可能 *(*定義 *4.3)* であるならば、$(\mathcal{M},g,J)$ を**ケーラー多様体** *(Kähler manifold)* と呼ぶ *[18]*。

定理 5.1. *(* 概ケーラー多様体がケーラー多様体であるための必要十分条件*, [18]) :* ∇ をレビチビタ接続とする。

$$\nabla J=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{概ケーラー多様体 } (\mathcal{M},g,J) \text{ がケーラー多様体}$$

なお、概エルミート多様体の中では以下の多様体のクラスが定義されている。

定義 5.4. $(\mathcal{M},g)$ を概エルミート多様体とする。もし、J が積分可能 *(*定義 *4.3)* であるならば、$(\mathcal{M},g)$ を**エルミート多様体** *(Hermite manifold)* と呼ぶ *[13]*。

これまで登場した多様体の一部の間の関係を図示すると以下になる

複素多様体	$\subseteq$	概複素多様体	$\subseteq$	偶数次元多様体
エルミート多様体	$\subseteq$	概エルミート多様体		
ケーラー多様体	$\subseteq$	概ケーラー多様体		

更に以下も定義されている

定義 5.5. $(\mathcal{M},g,J)$ を概エルミート的多様体かつ $(\mathcal{M},g,\nabla)$ は統計多様体、∇ と J は $\nabla J=0$ を満たすものとする。∇^* を g に付随する双対接続を導入しておく。このとき $(\mathcal{M},g,\nabla,J)$ を**ケーラー的統計多様体** *(Kähler-like statistical manifold)* と呼ぶ *[16, 17]*。

定義 5.6. $(\mathcal{M},J)$ を概複素多様体、∇ を接続とする。もし、以下の条件

1. $(\mathcal{M},g,\nabla)$ が統計多様体

2. $\nabla\omega_{\mathrm{II}}=0$、ここで ω_{II} は 2 形式場で *(12) :*

$$\omega_{\mathrm{II}}(X,Y)=g(X,JY),$$

であるとする。ここで X,Y は任意のベクトル場。

を満たすなら $(\mathcal{M},\nabla,g,J)$ を**正則統計多様体** *(holomorphic statistical manifold)* と呼ぶ *[7]*。

定義 5.7. $(\mathcal{M},g,\nabla)$ を統計多様体かつ $(\mathcal{M},g,J)$ が概ケーラー多様体、ω_{II} を *(12)* で与えられる 2 形式場とする。もし、$\nabla\omega_{\mathrm{II}}=0$ であるなら $(\mathcal{M},g,J,\nabla)$ を **シンプレクティック統計多様体** *(Symplectic statistical manifold)* と呼ぶ *[14]*[1]。

[1]野田氏は $(\mathcal{M},g,J,\omega,\nabla,\nabla^*)$ を SS 多様体と呼んでいる [15]。SS は Statistics と Symplectic の頭文字である。

注意 5.2. g と概複素構造を使って誘導するシンプレクティック 2 形式場には 2 つの慣例がある。一つは (11) で定義される ω で、一方は (12) で定義される ω_{II} である。両者の関係は符号が異なることである。概エルミート多様体 ($\neq$ 概エルミート的多様体) の上で $g(V,W)=g(JV,JW)$ であるから、

$$\omega_{\mathrm{II}}(X,Y) \stackrel{(12)}{=} g(X,JY) = g(JX,JJY) = -\,g(JX,Y) \stackrel{(11)}{=} -\,\omega(X,Y).$$

シンプレクティック統計多様体で曲率が消える時、以下の命題が示されている。

命題 5.2. *(野田, 命題 3.12 of [15]) :* $(\mathcal{M},g,J,\nabla)$ を $2n$-次元シンプレクティック統計多様体で $R^{\nabla}=0$ とする。この時、∇-アフィン座標系 $(\theta^1,\dots,\theta^{2n})$ や ∇^*-アフィン座標系 $(\eta_1,\dots,\eta_{2n})$ は正準座標にとれる。すなわち、

$$\omega = \mathrm{d}\eta_1\wedge\mathrm{d}\eta_{n+1}+\cdots+\mathrm{d}\eta_n\wedge\mathrm{d}\eta_{2n}, \qquad \omega = \mathrm{d}\theta^1\wedge\mathrm{d}\theta^{n+1}+\cdots+\mathrm{d}\theta^n\wedge\mathrm{d}\theta^{2n},$$

となるアフィン座標系が存在する。

概複素多様体で接続 ∇ が $\nabla J=0$ を満たす時に様々な概念が共存することをみてきたが、$\nabla J=0$ を満たす捩れなし接続を具体例を挙げて考察する。

例 5.2. $(\mathcal{M},J)$ を 2-次元概複素多様体、$\{x,y\}$ を座標系、ベクトル場の基底を $\{\partial/\partial x,\partial/\partial y\}$ その双対基底を $\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$、$J$ を (8) で多様体の次元を 2 にしたもので与えられる概複素構造とする：

$$J=\mathrm{d}y\otimes\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{d}x\otimes\frac{\partial}{\partial y}.$$

以下で

- $\nabla J=0$
- $T^{\nabla}=0$

を満たす接続 ∇ を探す。具体的には接続 ∇ を接続係数 $\{\Gamma_{ab}{}^{c}\}$ で $\nabla_{\partial_a}\partial_b=\Gamma_{ab}{}^{c}\partial_c$, $(\partial_a:=\partial/\partial x^a)$ により指定する時、$\nabla J=0$ と $T^{\nabla}=0$ を課した際、$\{\Gamma_{ab}{}^{c}\}$ がどの程度制限されるかを見る。

まず X,Y をベクトル場、α を 1 形式場とすると、

$$(\nabla J)(X,Y,\alpha)=(\nabla_X J)(Y,\alpha).$$

上式の右辺を計算する。∇_X のライプニッツ則により

$$\begin{aligned}\nabla_X J &= \nabla_X\left(\mathrm{d}y\otimes\frac{\partial}{\partial x}\right)-\nabla_X\left(\mathrm{d}x\otimes\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ &= (\nabla_X\mathrm{d}y)\otimes\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\otimes\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial x}\right)-(\nabla_X\mathrm{d}x)\otimes\frac{\partial}{\partial y}-\mathrm{d}x\otimes\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}(\nabla_X J)(Y,\alpha) &= (\nabla_X\mathrm{d}y)(Y)\cdot\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\mathrm{d}y(Y)\cdot\alpha\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ &\quad -(\nabla_X\mathrm{d}x)(Y)\cdot\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)-\mathrm{d}x(Y)\cdot\alpha\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

これに $Y=\{\partial_x,\partial_y\}$ や $\alpha=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}$ を代入して以下を得る。

Y	α	$(\nabla_X J)(Y,\alpha)$
∂_x	$\mathrm{d}x$	$(\nabla_X\mathrm{d}y)(\partial_x)-\mathrm{d}x\,(\nabla_X\partial_y)$
∂_x	$\mathrm{d}y$	$-(\nabla_X\mathrm{d}x)(\partial_x)-\mathrm{d}y\,(\nabla_X\partial_y)$
∂_y	$\mathrm{d}x$	$(\nabla_X\mathrm{d}y)(\partial_y)+\mathrm{d}x\,(\nabla_X\partial_x)$
∂_y	$\mathrm{d}y$	$-(\nabla_X\mathrm{d}x)(\partial_y)+\mathrm{d}y\,(\nabla_X\partial_x)$

この表で $X=\{\partial_x,\partial_y\}$ と

$$\nabla_{\partial_a}\partial_b=\Gamma_{ab}{}^{c}\partial_c,\qquad \nabla_{\partial_a}e^{b}=-\Gamma_{ac}{}^{b}e^{c},\qquad (\,e^{a}=\{\mathrm{d}x,\mathrm{d}y\}\,)$$

を代入して以下を得る。

Y	α	X	$(\nabla_X J)(Y,\alpha)$	$(\nabla_X J)(Y,\alpha)$	$\nabla J=0$ の条件
∂_x	$\mathrm{d}x$	∂_x	$(\nabla_{\partial_x}\mathrm{d}y)(\partial_x)-\mathrm{d}x\,(\nabla_{\partial_x}\partial_y)$	$-\Gamma_{xx}{}^{y}-\Gamma_{xy}{}^{x}$	$\Gamma_{xy}{}^{x}=-\Gamma_{xx}{}^{y}$
∂_x	$\mathrm{d}x$	∂_y	$(\nabla_{\partial_y}\mathrm{d}y)(\partial_x)-\mathrm{d}x\,(\nabla_{\partial_y}\partial_y)$	$-\Gamma_{yx}{}^{y}-\Gamma_{yy}{}^{x}$	$\Gamma_{yx}{}^{y}=-\Gamma_{yy}{}^{x}$
∂_x	$\mathrm{d}y$	∂_x	$-(\nabla_{\partial_x}\mathrm{d}x)(\partial_x)-\mathrm{d}y\,(\nabla_{\partial_x}\partial_y)$	$\Gamma_{xx}{}^{x}-\Gamma_{xy}{}^{y}$	$\Gamma_{xy}{}^{y}=\Gamma_{xx}{}^{x}$
∂_x	$\mathrm{d}y$	∂_y	$-(\nabla_{\partial_y}\mathrm{d}x)(\partial_x)-\mathrm{d}y\,(\nabla_{\partial_y}\partial_y)$	$\Gamma_{yx}{}^{x}-\Gamma_{yy}{}^{y}$	$\Gamma_{yx}{}^{x}=\Gamma_{xy}{}^{x}$
∂_y	$\mathrm{d}x$	∂_x	$(\nabla_{\partial_x}\mathrm{d}y)(\partial_y)+\mathrm{d}x\,(\nabla_{\partial_x}\partial_x)$	$-\Gamma_{xy}{}^{y}+\Gamma_{xx}{}^{x}$	$\Gamma_{xy}{}^{y}=\Gamma_{xx}{}^{x}$
∂_y	$\mathrm{d}x$	∂_y	$(\nabla_{\partial_y}\mathrm{d}y)(\partial_y)+\mathrm{d}x\,(\nabla_{\partial_y}\partial_x)$	$-\Gamma_{yy}{}^{y}+\Gamma_{yx}{}^{x}$	$\Gamma_{yx}{}^{x}=\Gamma_{yy}{}^{y}$
∂_y	$\mathrm{d}y$	∂_x	$-(\nabla_{\partial_x}\mathrm{d}x)(\partial_y)+\mathrm{d}y\,(\nabla_{\partial_x}\partial_x)$	$\Gamma_{xy}{}^{x}+\Gamma_{xx}{}^{y}$	$\Gamma_{xy}{}^{x}=-\Gamma_{xx}{}^{y}$
∂_y	$\mathrm{d}y$	∂_y	$-(\nabla_{\partial_y}\mathrm{d}x)(\partial_y)+\mathrm{d}y\,(\nabla_{\partial_y}\partial_x)$	$\Gamma_{yy}{}^{x}+\Gamma_{yx}{}^{y}$	$\Gamma_{yx}{}^{y}=-\Gamma_{yy}{}^{x}$

この表をまとめるために

$$\Upsilon_A=\Gamma_{xx}{}^{x},\qquad \text{及び}\qquad \Upsilon_B=\Gamma_{xx}{}^{y},$$

と置くと接続係数は以下のようにまとめられる

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{xx}{}^{x}=\Upsilon_A,\qquad \Gamma_{xy}{}^{x}=-\Upsilon_B=\Gamma_{yx}{}^{x},\qquad \Gamma_{yy}{}^{x}=-\Upsilon_A,\\
&\Gamma_{xx}{}^{y}=\Upsilon_B,\qquad \Gamma_{xy}{}^{y}=\Upsilon_A=\Gamma_{yx}{}^{y},\qquad \Gamma_{yy}{}^{y}=-\Upsilon_B.
\end{aligned}$$

以上により、具体的に $\nabla J=0$ を満たす捻じれなし接続を構成することができた。Υ_A と Υ_B は任意である。

ここでリーマン計量 g が

$$g=g_0(x,y)\;[\,\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y\,]$$

として与えられている場合を考える。∇ をレビチビタ接続に一致させるには (7) を参考にして

$$\Upsilon_A=\Gamma_1=\frac{1}{2\,g_0}\frac{\partial g_0}{\partial x},\qquad \text{及び}\qquad \Upsilon_B=\Gamma_2=\frac{-1}{2\,g_0}\frac{\partial g_0}{\partial y},$$

と置けばよいことが分かる。

6　結語

本ノートでは主に

- 平坦とは限らない統計多様体について
- 偶数次元の場合の統計多様体と概複素構造やシンプレクティック構造が入る多様体

の解説を行った。奇数次元の場合も種々の議論がある [8, 9]。このノートに関連し、具体的に力学系と情報幾何学を結びつける論文の一つとして [21] を挙げておく。

謝辞

本研究を進めるにあたり、研究会等で様々な人から有益なコメントを戴きました。これらの方々に感謝いたします。

A　付録

A.1　双対平坦空間の意義や双対平坦とは限らない統計多様体の意義

双対平坦空間の定義をまず与える。

定義 A.1. $(\mathcal{M}, g, \nabla)$ を統計多様体とする。この時、$R^{\nabla} = 0$ であれば、$(\mathcal{M}, g, \nabla)$ は**双対平坦空間** *(dually flat space)* と呼ばれる *[14]*。

命題3.6 により $R^{\nabla} = 0$ であれば $R^{\nabla^*} = 0$ である。また、接続 ∇ と ∇^* は統計多様体の定義により、$T^{\nabla} = 0$ かつ $T^{\nabla^*} = 0$ である。

双対平坦空間や双対平坦空間に限らない統計多様体の意義を考えるために、歴史を振り返る。情報幾何学の創世期において、

- いかなる計量が数理統計学の微分幾何学化にとって良いものか?
- いかなる接続が数理統計学の微分幾何学化にとって良いものか?

が考察された [1, 2]。この解答を理解するに、[6] に沿って説明するのがよいであろう。そのために以下を定義する。

定義 A.2. S_{n-1} を $\Omega_n := \{1, \ldots, n\}$ 上の確率分布全体

$$S_{n-1} = \left\{ p : \Omega_n \mapsto \mathbb{R}_{++} \,\middle|\, \sum_{\omega \in \Omega_n} p(\omega) = 1 \right\}, \qquad \mathbb{R}_{++} := \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \,\},$$

とする。この S_{n-1} を**有限確率分布空間**と呼ぶ。

マルコフ埋め込みとよばれる写像に対して不変性を要求すると、有限確率分布空間に対して以下が成立する [6]。

- (Chentsov の定理) : マルコフ埋め込み不変な計量は定数倍を除いてフィッシャー計量 g^{F} のみ。ここで
$$g^{\mathrm{F}}(X, Y) := \sum_{\omega=1}^{n} p(\omega)\,(X \log p(\omega)\,)(Y \log p(\omega)\,)$$
- (Chentsov の定理) : マルコフ埋め込み不変な接続は定数倍を除いて
$$\begin{aligned} g^{\mathrm{F}}(\nabla^{(\alpha)}_X Y, Z) &:= g^{\mathrm{F}}(\nabla^{(0)}_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2} S(X, Y, Z), \qquad \nabla^{(0)} : g^{\mathrm{F}} \text{ により誘導されるレビチビタ接続} \\ S(X, Y, Z) &:= \sum_{\omega=1}^{n} p(\omega)\,(X \log p(\omega)\,)(Y \log p(\omega)\,)(Z \log p(\omega)\,) \end{aligned}$$
のみである。

ここで $\nabla^{(\alpha)}$ は α-接続と呼ばれる。

双対平坦空間の重要性は以下の定理から明らかであろう。

定理 A.1. *(* 有限確率分布空間が誘導する双対平坦空間*,* 定理 *5.3.1 of [6]) :* S_{n-1} を Ω_n 上の確率分布全体、g^{F} を確率分布から誘導されるフィッシャー計量、$\nabla^{(\alpha)}, (\alpha \in \mathbb{R})$ を α-接続とする。この時、以下が成立する

1. 各 α に対し、$T^{\nabla^{(\alpha)}} = 0.$

2. 各 α に対し、$\nabla^{(-\alpha)}$ は g に付随する双対接続

3. $(S_{n-1}, g, \nabla^{(1)})$ は双対平坦空間

この定理や、平坦性による数学的なシンプルさにより、情報幾何学において双対平坦空間が重点的に調べられてきた。この定理の 3. の部分を除くと、統計多様体の定義に至る (定義3.6).

参考文献

[1] 甘利、長岡 “情報幾何の方法”, 岩波書店, (1993).

[2] S. Amari and H. Nagaoka, “Methods of Information Geometry”, Oxford university press, (2000).

[3] 甘利, “情報幾何学の新展開”, サイエンス社, (2014).

[4] V.I. Arnold, “古典力学の数学的方法”, 岩波書店, (1980).

[5] A. Fujiwara and S. Amari, “Gradient systems in view of information geometry”, Physica D, **80**,317–327, (1995).

[6] 藤原 “情報幾何学の基礎”, 牧野書店, (2015).

[7] H. Furuhata and I. Hasegawa, “Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds”, Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds, Springer, 179–215, (2016).

[8] H. Furuhata, I. Hasegawa, Y. Okuyama, and K. Sato, “Kenmotsu statistical manifolds and warped product”, preprint.

[9] H. Furuhata, I. Hasegawa, Y. Okuyama, and K. Sato, “Sasakian statistical manifolds”, J. Geom. Phys., **117**, 179–186, (2017).

[10] S. Goto, “Legendre submanifolds in contact manifolds as attractors and geometric nonequilibrium thermodynamics”, J. Math. Phys. **56**, 073301 [30pages], (2015).

[11] S. Goto, “Contact geometric descriptions of vector fields on dually flat spaces and their applications in electric circuit models and nonequilibrium statistical mechanics”, J. Math. Phys.**57**, 102702 [40pages], (2016).

[12] 伊藤, “常微分方程式と解析力学”, 共立出版, (1998).

[13] 中原, 佐久間, 理論物理学のための幾何学とトポロジー I, ピアソン,(2000).

[14] T. Noda, “Symplectic structures on statistical manifolds”, J. Aus. Math. Soc. **90**, 371–384, (2011).

[15] 野田, “シンプレクティックベクトル空間上の確率分布の発展について –ラクダを飼ってみませんか?–”, 数理解析研究所講究録, **1916**, 37–54, (2014).

[16] K. Takano, “Statistical manifolds with almost contact structures and its statistical submersions”, J. Geom. **85**, 171–187, (2006).

[17] 高野, “幾何的的構造をもつ統計多様体について”, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (2).

[18] 丹野, “多様体の微分幾何”, 実教出版, (1976).

[19] Y. Nakamura, “Completely integrable Gradient systems on the manifolds of Gaussian and multinomial distributions”, Japan J. Indust. Appl. Math., **10**, 179–189, (1993).

[20] Y. Uwano, “All the trajectories of an extended averaged Hebbian learning equation on the quantum state space are the e-geodesics”, Mathematical Modeling and Geometry, **4**, 19–33, (2016).

[21] S. Goto and K. Umeno, “Maps on statistical manifolds exactly reduced from the Perron-Frobenius equations for solvable chaotic maps”, `arXiv:1707.03607`.